Gausova metoda za rješavanje sistema linearnih jednačina

Neka su $a_{ij}, b_i \left(i=1,...,m; j=1,...,n\right)$ realne konstante. Tada je

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih $x_1,...,x_n$.

Ako je u (*) $m \neq n$, možemo koristiti Gaussovu metodu. Uvedimo sljedeće matrice: $A = \left[a_{ij}\right]$ - matrica sistema i $A/B = \left[a_{ij} \mid b_i\right]$ - proširena matrica.
Tada sistem ima rješenja ako te dvije matrice imaju isti rang. Pri tome, sistem ima tačno jedno rješenje ako je $rang\, A$ jednak broju nepoznatih, a ima beskonačno mnogo rješenja ako je $rang\, A = rang\, A/B$ manje od broja nepoznatih. U posljednjem slučaju razlika između broja nepoznatih i $rang\, A$ predstavlja broj nepoznatih koje treba uzeti proizvoljno.

1. Riješiti sistem jednačina:

$$2x + 4y - 5z = -5$$
$$-x - y + z = 0$$
$$2x + y - z = 1$$

Rješenje:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \left[A/B\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -5 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$[A/B]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 4 & -5 & -5\\ 0 & 2 & -3 & -5\\ 0 & -3 & 4 & 6\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 4 & -5 & -5\\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2}\\ 0 & -3 & 4 & 6\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 4 & -5 & -5\\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2}\\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2}\end{array}\right]$$

$rangA = 3$

$rang(A/B) = 3$

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 5z &= -5\\ y - \frac{3}{2}z &= \frac{-5}{2}\\ -\frac{1}{2}z &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$x = 1, y = 2, z = 3$

2. Riješiti sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1\\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 3\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 4\end{aligned}$$

Rješenje:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1 & 2\\ 5 & -1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 2 & -3\end{bmatrix}, [A/B]=\left[\begin{array}{cccc|c}3 & -2 & 1 & 2 & 1\\ 5 & -1 & 3 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 2 & -3 & 4\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}3 & -2 & 1 & 2 & 1\\ 5 & -1 & 3 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 2 & -3 & 4\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}3 & -2 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -7 & -4 & 13 & -4\\ 0 & -7 & -4 & 13 & -10\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}3 & -2 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -7 & -4 & 13 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6\end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1\\ -7x_2 - 4x_3 + 13x_4 &= -4\\ 0 &= -6\end{aligned}$$

Sistem nema rješenja: rang$A$=2; rang(A/B)=3.

3. Riješiti sistem jednačina:

$$2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = -1$$
$$3x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -6$$

Rješenje:

$$[A/B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 20 & -14 & -12 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

rang$A$=rang(A/B)=3

rang$A$=rang(A/B)=3

$$4x_3 = -3 \Rightarrow x_3 = -\frac{3}{4}$$
$$-6x_2 - 5x_3 = -3 \Rightarrow -6x_2 = 5x_3 - 3 \Rightarrow x_2 = -\frac{9}{8}$$
$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = 5x_2 - 3x_3 + 2 = -\frac{11}{8}$$
$$R: (-\frac{11}{8}, -\frac{9}{8}, -\frac{3}{4})$$

4. Riješiti sistem jednačina:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$$
$$2x_1 + 3x_2 \quad -5x_4 = 0$$
$$5x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 6$$

Rješenje:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -5 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & -6 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & -5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -16 & -19 \\ 0 & 0 & -3 & -16 & -19 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -16 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ -3x_3 - 16x_4 &= -19 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$rang(A) = rang(A/B) = 3 < 4 \Rightarrow$ sistem je neodređen

$$-3x_3 = 16x_4 - 19 \Rightarrow x_3 = \frac{-16x_4 + 19}{3}$$

$$2x_2 - x_3 = 3 - 2x_4 \Rightarrow 2x_2 = x_3 + 3 - 2x_4 = \frac{19 - 16x_4 + 9 - 6x_4}{3} = \frac{28 - 22x_4}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{14 - 11x_4}{3}$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 + x_4 \Rightarrow x_1 = x_2 - 2x_3 + x_4 + 1 = \frac{24x_4 - 21}{3} = 8x_4 - 7$$

5. Za koje vrijednosti parametra a sistem

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 2 \\ x + y + az &= -3 \end{aligned}$$

ima jedinstveno rješenje? Odrediti to rješenje!

Rješenje:

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -3 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -3 \\ 0 & a-1 & 1-a & 5 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1+3a \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -3 \\ 0 & a-1 & 1-a & 5 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & 3(a+2) \end{bmatrix}$$

1) $(1-a)(a+2)\neq 0 \Rightarrow a\neq 1, a\neq -2$. Tada je $\text{rang}A=\text{rang}\ A/B=3$ (broj nepoznatih u sistemu), pa je sistem određen.

$$(1-a)(a+2)z=3a+6 \Rightarrow z=\frac{3(a+2)}{(1-a)(a+2)}=\frac{3}{1-a}$$

$$(a-1)y+(1-a)\frac{3}{(1-a)}=5 \Rightarrow y=\frac{2}{(a-1)}$$

$$x+y+az=-3 \Rightarrow x+\frac{2}{a-1}+a\frac{3}{1-a}=-3 \Rightarrow x=\frac{-3(1-a)+2-3a}{1-a} \Rightarrow x=\frac{1}{a-1}$$

2) Za $a=1$, $\text{rang}A=1, \text{rang}\ A/B=2$, pa sistem nema rješenja.

3) Za $a=-2$, $\text{rang}A=\text{rang}\ A/B=2<3$ (broj nepoznatih u sistemu), sistem ima beskonačno mnogo rješenja.

$$-3y+2z=5 \Rightarrow y=\frac{2z-5}{3}$$

$$x+y-2z=-3 \Rightarrow x=-3-y+2z=-3-\frac{2z-5}{3}+2z=\frac{-9-2z+5+6z}{3}=\frac{4z-4}{3}$$

Rješenja sistema su: $\left(\frac{4z-4}{3},\frac{2z-5}{3},z\right), z\in\mathbb{R}$.

6. Riješiti sljedeće sisteme jednačina:

a) $\begin{aligned}2x+3y&=8\\7x-5y&=-3\end{aligned}$ (R:(1,2))

b) $\begin{aligned}2x+3y&=8\\4x+6y&=10\end{aligned}$ (nema rješenja)

c) $\begin{aligned}2x+3y&=8\\4x+6y&=16\end{aligned}$ (neodređen)

d) $\begin{aligned}x+y+z&=5\\x-y+z&=1\\x+z&=2\end{aligned}$ (nema rješenja)

e)
$$\begin{aligned}x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=11\\2x_1+x_2+5x_3+x_4&=3\\3x_1+2x_2+x_3+2x_4&=-1\\x_1+x_2+5x_3+x_4&=5\end{aligned} \qquad \left(R:\left(2,\frac{247}{21},-\frac{9}{7},\frac{5}{3}\right)\right)$$

7. Diskutovati rješenja sistema jednačina za razne vrijednosti parametara:

$$\begin{array}{lll} x+y+z=\lambda & ax+y-z=1 & ax+y+z=4 \\ x+(1+\lambda)y+z=2\lambda & x+ay-z=1 & x+cy+z=3 \\ x+y+(1+z)\lambda=0 & x-y-az=1 & x+2cy+z=4 \end{array}$$

8. Odrediti parametar tako da sistem ima rješenje, pa naći to rješenje

$$4x+y=5$$
$$3x+2y=5$$
$$6x+2y+2\lambda=\lambda^2$$

Rez.: $\lambda_1=4, \lambda_2=-2, x=y=1$.

9. Riješiti sistem:

$$2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6$$
$$3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4$$
$$9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2$$

Rez.: Sistem ima beskonačno mnogo rješenja,
$x_1=8+9a-4b, x_2=a, x_3=b, x_4=-25a+5b-10$, $a,b \in R$.